Aula 3
Equações Exatas e Fatores Integrantes.

MA311 - Cálculo III

Marcos Eduardo Valle

Departamento de Matemática Aplicada
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Universidade Estadual de Campinas

Equação Exata

Uma EDO é **exata** se pode ser escrita como

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad \Big(\text{ou } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\Big), \tag{1}$$

em que M e N são funções com derivadas parciais contínuas tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2}$$

Quando (10) é satisfeita, existe uma função ψ tal que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M \quad \text{e} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N. \tag{3}$$

Sobretudo, a solução da EDO exata é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = c, \tag{4}$$

em que c é uma constante.

Exemplo 1

Resolva a EDO

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Exemplo 1

Resolva a EDO

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0.$$

Resposta: A EDO acima é exata e a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c,$$

em que c é uma constante.

Exemplo 2

Resolva a EDO

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1)y' = 0.$$

Exemplo 2

Resolva a EDO

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\operatorname{sen} x + x^2 e^y - 1)y' = 0.$$

Resposta: A EDO é exata e a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y - y = c,$$

em que c é uma constante.

Exemplo 3

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Exemplo 3

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Resposta: Essa EDO não é exata porque

$$M_y = 3x + 2y \quad \text{e} \quad N_x = 2x + y,$$

portanto, $M_y \neq N_x$.

Fator Integrante

Algumas vezes, é possível converter uma EDO que não é exata numa EDO exata multiplicando-a por um fator integrante.

Especificamente, suponha que

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \tag{5}$$

não é exata. Multiplicando por $\mu \equiv \mu(x)$, encontramos

$$\mu M + \mu N y' = 0. \tag{6}$$

Essa última EDO será exata se

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Equivalentemente,

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \tag{7}$$

A princípio, qualquer solução de (7) pode ser usada para determinar a solução de (5) por (6).

Em geral, a solução de

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0,$$

é tão difícil quanto a EDO original. Para simplificar o problema, geralmente assumimos que o fator integrante depende ou somente de x ou somente de y.

Quando $\mu \equiv \mu(x)$, tem-se

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu, \tag{8}$$

que pode ser resolvida se o termo do lado direito depende somente de x.

Analogamente, quando $\mu \equiv \mu(y)$, tem-se

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{N_x - M_y}{M}\mu, \tag{9}$$

que pode ser resolvida se o termo do lado direito depende somente de y.

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Exemplo 4

Resolva a EDO

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Resposta: Considerando o fator integrante $\mu(x) = x$, obtemos uma EDO exata e concluímos que a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c.$$

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$y^2 \cos x dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x) dy = 0.$$

Exemplo 5

Resolva a EDO

$$y^2 \cos x dx + (4 + 5y \operatorname{sen} x)dy = 0.$$

Resposta: Considerando o fator integrante $\mu(y) = y^3$, obtemos uma EDO exata e concluímos que a solução geral é dada implicitamente por

$$\psi(x, y) = y^5 \operatorname{sen} x + y^4 = c.$$

Considerações Finais

Na aula de hoje vimos a classe das EDOs exatas.

Uma EDO é exata se pode ser escrita como

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0,$$

em que M e N são funções com derivadas parciais contínuas tais que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{10}$$

Em alguns casos, podemos transformar uma EDO que não é exata em uma exata usando um fator integrante, geralmente $\mu \equiv \mu(x)$ ou $\mu \equiv \mu(y)$.

A solução da EDO exata é dada implicitamente por

$$\psi(x,y) = c, \tag{11}$$

em que c é uma constante e ψ é tal que $\psi_x = M$ e $\psi_y = N$.